

# ETUDE EXPERIMENTALE ET ANALYTIQUE DU FROTTEMENT ET DE LA TRANSMISSION DE LA CHALEUR AU SEIN D'ÉCOULEMENTS TURBULENTS

JEAN FAYET

Attaché de Recherches au C.N.R.S. Laboratoire d'Etudes Thermiques de l'École Nationale Supérieure  
de Mécanique et d'Aérotechnique, Poitiers (Vienne), France

(Reçu le 4 février 1970)

**Résumé**— On détermine les diffusivités turbulentes expérimentales par des mesures de vitesses et températures moyennes au sein d'écoulements non chauffés, puis chauffés. Pour ces mêmes écoulements, on essaye d'atteindre les diffusivités par l'étude des perturbations créées au sein du fluide par des fils fins.

On applique les équations de l'écoulement laminaire aux écoulements turbulents étudiés et on discute les solutions de première approximation qui supposent les diffusivités constantes. Les résultats expérimentaux ainsi obtenus conduisent à adopter, pour l'écoulement naturel et pour les sillages, des diffusivités variables suivant les points de mesure. On corrige les hypothèses de départ pour tenir compte de ces variations. On compare ensuite les diffusivités de l'écoulement naturel (sans fils) aux diffusivités de sillage.

On rapproche les théories de Bory et de Taylor sur la diffusion, de façon à relier les coefficients phénoménologiques de diffusivité à certaines caractéristiques statistiques de la turbulence. On explique ensuite les variations des diffusivités en fonction des diamètres des fils, en associant à chaque diamètre une épaisseur de particule fictive.

Ces résultats peuvent être généralisés et peuvent permettre à partir de l'étude de la diffusion en milieu hétérogène limité, de donner des lois de variation des diffusivités dans l'écoulement en conduite.

## NOTATIONS

$Y, r,$	coordonnées d'un point dans l'écoulement établi, comptées à partir de l'axe des conduites;	$T_0, T_i,$	température de l'air avant chauffage;
$x, y,$	coordonnées d'un point du sillage ( $x$ dans le sens de l'écoulement, le fil étant l'origine);	$T_p,$	température de la paroi chauffée;
$t,$	temps de diffusion;	$m,$	masse individualisée en diffusion;
$\mathcal{E},$	excentration, $\mathcal{E} = (2Y \text{ ou } 2r)/\text{largeur conduite}$ ;	$A,$	paramètre de diffusivité;
$\lambda,$	conductivité thermique;	$l^2,$	carré de la distance de diffusion de la masse individualisée;
$\mu,$	viscosité;	$\overline{y^2},$	carré moyen de la distance de dispersion des particules;
$a,$	diffusivité thermique;	$\rho,$	masse volumique de l'air;
$\nu,$	viscosité cinématique;	$C_p,$	chaleur spécifique de l'air à pression constante;
$Pr_t,$	nombre de Prandtl turbulent, $Pr_t = \nu_t/a_t$ ;	$d,$	diamètre des fils;
$U, V,$	composantes de la vitesse suivant $x$ et $y$ ;	$e_0,$	épaisseur de la particule associée à un fil de diamètre $d$ .
$p,$	pression statique;	Indices	
$T,$	température de l'air chauffé;	$t,$	turbulent;
		$\mu, \lambda, \nu,$	a sans indice, valeurs moléculaires;
		$s,$	dans le sillage;
		$c,$	dans la conduite.

## INTRODUCTION

ON SAIT que les phénomènes mécaniques et thermiques qui s'observent dans les écoulements laminaires se coordonnent de façon très satisfaisante en exprimant les tensions de frottements et les flux de chaleur transmis par les relations de Navier-Stokes et de Fourier.

Ces relations permettent de définir les coefficients de viscosité  $\mu$  et de conductivité thermique  $\lambda$ , que, suivant une terminologie classique, nous dirons laminaires, et à partir de ceux-ci, la viscosité cinématique (ou diffusivité mécanique)  $\nu = \mu/\rho$ , et, la diffusivité thermique  $a = \lambda/C_p \cdot \rho$ .

Dans le cas des gaz,  $\mu$  et  $\lambda$  (ou, ce qui revient au même,  $\nu$  et  $a$ ) sont liés par une relation simple, due à Maxwell, et qui se traduit par l'introduction en mécanique des fluides du nombre de Prandtl:  $Pr = \mu \cdot C_p/\lambda = \nu/a$ . Cette relation est une conséquence du fait que frottement et transmission de chaleur sont "des phénomènes de transfert", c'est-à-dire correspondent à un transport par les particules qui diffusent (ici les molécules) de leur quantité de mouvement et de leur énergie d'agitation thermique.

Dans les écoulements turbulents, les phénomènes sont beaucoup plus compliqués. On peut écrire à leur propos les mêmes équations qu'en écoulement laminaire en y introduisant les composantes des grandeurs statistiques moyennes, et ceci définit les grandeurs homologues de  $\mu$  et de  $\lambda$ , que nous écrirons  $\mu_t$  et  $\lambda_t$ , que nous appellerons viscosités et conductivités turbulentes. De même, on en déduit les diffusivités turbulentes  $\nu_t = \mu_t/\rho$  et  $a_t = \lambda_t/C_p \cdot \rho$ , et ensuite le nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t = \nu_t/a_t$ .

La difficulté, en écoulement turbulent, est que ces différentes grandeurs ne sont pas des caractéristiques spécifiques du fluide, comme en laminaire, mais qu'elles sont attachées à l'écoulement lui-même et dépendent de la façon dont il se produit.

Il est évident que les valeurs locales de  $\nu_t$  et des  $a_t$  sont déterminées par la structure locale de l'écoulement, mais il est douteux que cette structure puisse être entièrement définie par

les dérivées d'espace de la *vitesse statistique* moyenne, bien plus vraisemblablement doivent intervenir certaines des grandeurs qu'introduit et mesure l'anémomètre à fil chaud.

Dans cet article, nous avons étudié le phénomène aérodynamique en mesurant les répartitions des vitesses, d'une part dans l'écoulement non perturbé, que nous dirons "naturel", d'autre part en apportant à cet écoulement des perturbations à l'aide de fils de différents diamètres tendus normalement à la vitesse; ils créent des sillages dont on détermine la constitution.

Parallèlement, la transmission de la chaleur a été étudiée de deux façons:

(a) on réalisait une convection classique par chauffage des parois de la canalisation, on relevait les répartitions des températures dans diverses sections droites;

(b) dans l'écoulement initialement isotherme, on produisait une perturbation thermique en chauffant électriquement les fils.

Les mesures derrière les fils chauffés ont été faites pour les deux canalisations, les expériences par chauffage des parois pour la canalisation rectangulaire seulement.

Dans une première partie de cet exposé, nous présentons les résultats des expériences et leurs coordinations à l'aide des équations de Navier-Fourier (simplifiées suivant les approximations classiques). Ceci conduit aux calculs des  $\nu_t$  et des  $a_t$ , dont on discute la signification.

La seconde partie correspond à l'aspect théorique. Comme pour le laminaire, il est constamment admis en turbulent que le frottement et la conduction thermique sont des phénomènes de transfert liés à la diffusion des masses matérielles. Nous commençons donc par un rappel des grandes lignes des deux théories de diffusion suivantes:

(a) la théorie continue de Bory [1-5], qui permet l'expression immédiate des  $\nu_t$  et  $a_t$  en fonction de paramètres diffusifs.

(b) la théorie de la dispersion des particules

de Taylor [7-14], qui rattache la diffusion aux grandeurs de l'étude statistique de la turbulence.

Nous établissons ensuite une relation entre les grandeurs fondamentales des théories de Bory et de Taylor, jetant ainsi un pont entre les grandeurs phénoménologiques  $v_r$ ,  $a_r$  et celles de l'anémométrie à fil chaud.

Enfin, par application de la théorie continue, nous montrons comment il est possible d'exprimer à l'aide d'une seule fonction de diffusion  $g(t)$ , les fonctions de diffusion attachées aux différents fils par lesquelles on calcule les répartitions des diffusivités dans leurs sillages.

1. CONDITIONS EXPERIMENTALES

Les écoulements turbulents étudiés sont réalisés, d'une part, dans un tube lisse de section circulaire de 20 cm de diamètre intérieur et, d'autre part, dans un tube lisse de section

rectangulaire allongée dont les dimensions sont de  $4,56 \times 9,30 \text{ cm}^2$  (Fig. 1).

Le fluide est l'air aux conditions atmosphériques.

Les fils utilisés, dont les diamètres sont respectivement de 0,003, 0,010, 0,064 et 0,300 cm, sont tendus verticalement :

(a) en conduite rectangulaire, ils sont parallèles au grand côté du rectangle, et occupent pratiquement toute la hauteur du tube ;

(b) en conduite circulaire, leur longueur est de 6,8 cm (20 cm pour la tige de 0,300 cm).

Dans tous les cas un dispositif mécanique permet de les déplacer parallèlement à eux-mêmes dans une section droite du tube, (Fig. 2).

Le chauffage des fils se fait électriquement et de manière à dissiper une puissance constante quelle que soit la vitesse du fluide.

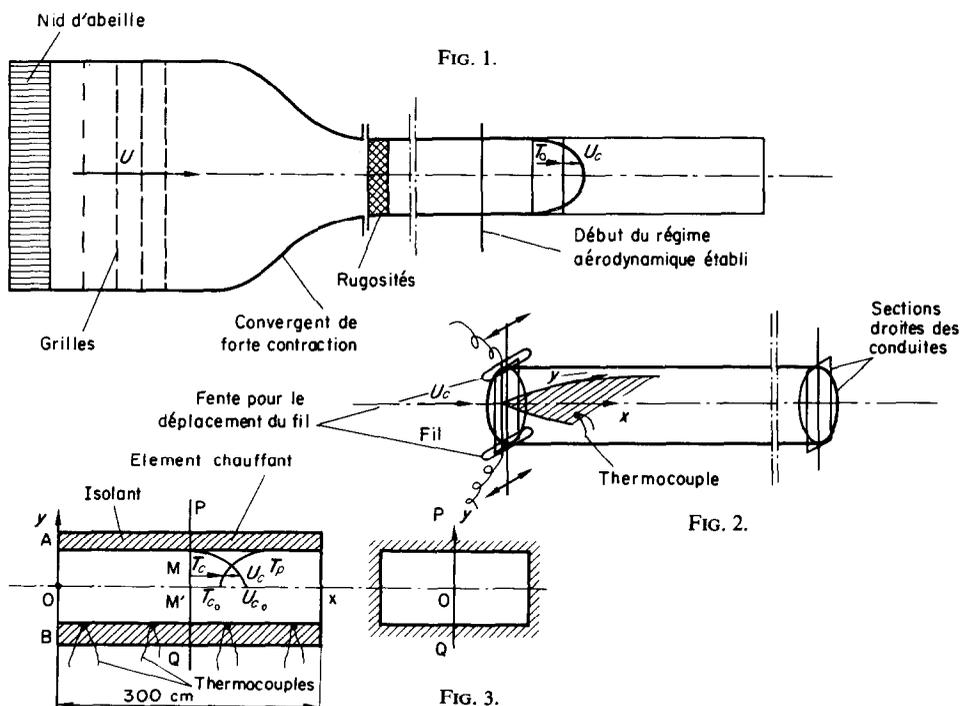


FIG. 1. Schéma de montage.  
 FIG. 2. Dispositif pour l'étude des sillages.  
 FIG. 3. Dispositif de chauffage.

### 1.1 Réalisation du Chauffage du Tube (pour la Canalisation Rectangulaire)

Le système utilisé pour chauffer la paroi est constitué par treize enroulements indépendants de ruban chauffant bobinés sur une couche isolante d'amiante. Le chauffage commence en bout du tronçon assurant un régime aérodynamique établi, (Fig. 3) et a lieu sur une longueur de 3 mètres, soit 50 fois le diamètre hydraulique. L'origine des abscisses  $x$  pour le phénomène thermique coïncide avec la section AB où débute le chauffage. La température en un point  $M(x, Y)$  du plan de sondage PQ sera désignée par  $T_c(x, Y)$ . Sur l'axe, en  $M(x, 0)$ , nous écrirons  $T_{c_0}$ .

#### 1.2 Les Appareils de Mesures

Pour mesurer les vitesses, nous utilisons soit une prise de pression totale et des prises de pression statique en paroi (nous admettons, comme il se fait habituellement, que la pression statique est uniforme dans une section droite), soit une prise de pression du type Prandtl. Le manomètre permet de lire 0,002 cm d'eau.

Nous mesurons les températures avec un thermocouple BTE/CTE compte tenu de la sensibilité du potentiomètre employé, la précision ainsi obtenue est en principe de 1/60 ième de degré centésimal.

Pour l'ensemble des mesures, les vitesses utilisées sont de 500, 1000, 2000 et 3000 cm/s environ, sur l'axe des conduites.

## 2. ASPECT THEORIQUE ELEMENTAIRE ET RESULTATS EXPERIMENTAUX

### 2.1 Définition de la Viscosité et de la Conductivité Turbulentes

On définit la viscosité  $\mu_t$  et la conductibilité  $\lambda_t$  turbulentes en transposant au turbulent les relations classiques de l'écoulement laminaire, on écrit :

$$\tau = -\mu_t \cdot \frac{dU}{dY} \quad \text{et} \quad q = -\lambda_t \cdot \frac{dT}{dY} \quad (1)$$

L'écoulement étant turbulent, on se trouve en présence de grandeurs fluctuantes, les équations (1) doivent être entendues sur les valeurs statistiques moyennes, que l'on note habituellement  $\bar{U}$ ,  $\bar{T}$  etc; pour ne pas compliquer inutilement les écritures nous conserverons les notations  $U$ ,  $T$ , etc.

A partir des grandeurs  $\mu_t$  et  $\lambda_t$  nous pouvons définir les quantités :

$$v_t = \frac{\mu_t}{\rho}, \quad a_t = \frac{\lambda_t}{\rho \cdot C_p}, \quad Pr_t = \frac{v_t}{a_t} \quad (2)$$

où  $\rho$  est la masse volumique locale pour laquelle nous adopterons la valeur statistique moyenne.

### 2.2 Etude de l'Écoulement Naturel (Non Perturbé par les Fils)

#### A. Etude théorique élémentaire

On écrit les mêmes équations que pour l'écoulement laminaire, on obtient ainsi, pour un écoulement établi entre deux parois parallèles indéfinies :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_c}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y} \left( v_t \frac{\partial U_c}{\partial Y} \right) \quad (3)$$

$$U_c \frac{\partial T_c}{\partial x} = \frac{1}{\rho \cdot C_p} \frac{\partial}{\partial Y} \left( \lambda_t \frac{\partial T_c}{\partial Y} \right)$$

Nous supposons que les équations précédentes sont applicables à l'écoulement en conduite rectangulaire, du moins dans la région médiane située aux alentours du plan PQ.

Pour l'écoulement établi en conduite cylindrique, l'équation est, en désignant par  $r$  la distance à l'axe d'un point de la section d'abscisse  $x$ ,

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_c}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( v_t \frac{U_c}{r} \right) \quad (4)$$

(les expériences par chauffage de la paroi n'ayant été faites que dans le cas de la conduite rectangulaire, il n'y a pas lieu ici d'écrire l'équation thermique).

Les calculs de  $v_t$  et de  $\lambda_t$  se font de la façon suivante :

par intégration des équations du groupe (3) on obtient :

$$\left. \begin{aligned} v_t \frac{\partial U_c}{\partial Y} &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_c}{\partial x} \cdot Y \\ \lambda_t \left[ \left( \frac{\partial T_c}{\partial Y} \right) - \left( \frac{\partial T_c}{\partial Y} \right)_0 \right] &= \\ & \int_0^Y \rho \cdot C_p \cdot U_c \cdot \frac{\partial T_c}{\partial x} \cdot dY \end{aligned} \right\} (3')$$

compte tenu que  $\partial p_c / \partial x$  est constant et que  $\partial U_c / \partial Y$  est nul sur l'axe de la conduite.

On peut alors, par des dérivations et des intégrations graphiques effectuées sur les courbes expérimentales, déterminer les valeurs numériques des coefficients des équations (3') et par suite obtenir  $v_t$  et  $\lambda_t$ .

Dans le cas de la conduite circulaire, on opère de la même façon sur l'équation (4).

## B. Les répartitions expérimentales des vitesses et températures

### (a) Variation longitudinale de la température

Lorsque  $x$  croît, la température augmente, et, en principe, elle doit tendre, pour  $x$  infini, vers la température de la paroi chaude.

Nos mesures mettent en évidence cet accroissement de la température, elles ont été faites dans les cinq sections droites d'abscisses :

$$x = 229, 239, 249, 259 \text{ et } 269 \text{ cm,}$$

les distances étant comptées, rappelons-le, à partir de la section de début de chauffage.

Nous caractérisons l'élévation de la température du fluide par son échauffement relatif :

$$\Delta T_R = \frac{T_c - T_0}{T_p - T_0}$$

On constate que, pour un  $Y$  donné, et dans les limites assez étroites des  $x$  expérimentés,  $\Delta T_R$  varie de façon pratiquement linéaire en fonction de  $x$ . On est ainsi conduit à définir un échauffement relatif unitaire:  $\delta T = \Delta T_R / \Delta x$ , qui est constant (entre les sections 229 et 269 cm, on ne

peut ne effet extrapoler car cela conduirait à une température infinie au loin).  $\delta T$  ne dépend pratiquement pas de la vitesse, il s'accroît très légèrement lorsque la différence totale de la température appliquée  $\Delta T = T_p - T_0$ , augmente.

Sur l'axe, pour des vitesses s'échelonnant de 10 à 30 m/s, et des  $\Delta T$  allant de 10 à 50°C environ, nous avons obtenu des valeurs de  $\delta T = \delta T_0$  comprises entre 0,0018 et 0,0021.

Ce qui donne, pour une vitesse de 20 m/s et un  $\Delta T$  de 20°C, une différence de températures entre les sections extrêmes de:  $0,002 \times 40 \times 20 = 1,6^\circ\text{C}$ .

Lorsqu'on s'éloigne de l'axe de la canalisation  $\delta T$  diminue (il doit en effet être pratiquement nul au voisinage immédiat de la paroi).

(b) *Les profils de vitesses et de températures.* Nous définirons vitesses et températures réduites par les relations :

$$U_R = \frac{U_c - U_c}{U_{c_0}} \quad \text{et} \quad T_R = \frac{T_c - T_{c_0}}{T_p - T_{c_0}}$$

La Fig. 4 représente les variations de  $U_R = (U_c - U_c) / U_{c_0}$  et de  $T_R = (T_c - T_{c_0}) / (T_p - T_{c_0})$  en fonction de  $\mathcal{E}$ .

La courbe inférieure représente  $U_R$ , la courbe supérieure le profil des températures réduites  $T_R$  relevé dans la section d'abscisse  $x = 269$  cm (points marqués ○); les points marqués ● correspondent aux mesures effectuées dans la section  $x = 249$  cm.

Les sommets des deux courbes coïncident en 0, cela est une conséquence de la façon dont nous avons défini  $U_R$  et  $T_R$ ; cette définition entraîne également que les courbes coïncident pour  $\mathcal{E} = \pm 1$  (c'est-à-dire sur la paroi), ces points sont en dehors des limites au graphique.

Les deux courbes ont même allure mais sont nettement séparées (le rapport  $T_R / U_R$  est en moyenne de l'ordre de 1,3). D'autre part elles ne se déduisent pas l'une de l'autre par affinité puisqu'elles ont deux points communs.

On remarquera cependant que les points ●, relevés 40 cm en amont de la section à laquelle correspond la courbe, sont tous situés au-dessus

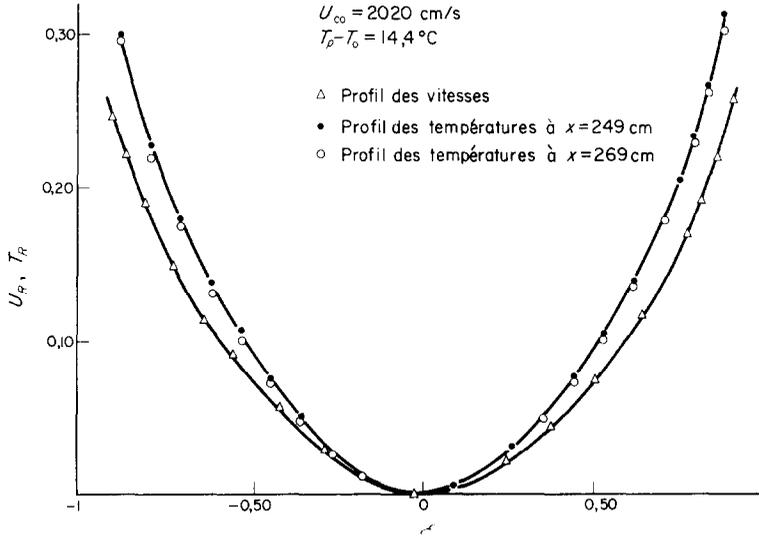


FIG. 4. Répartition des vitesses et des températures réduites en conduite rectangulaire.

de celle-ci: il semble donc que, lorsque la distance à la section de début de chauffage augmente, la courbe  $T_R$  descend, et par suite se rapproche de la courbe  $U_R$ . A très grande distance les deux courbes seraient donc pratiquement confondues, ce qui correspond à l'analogie de Reynolds.

Pour plusieurs vitesses de l'écoulement nous avons expérimenté en imposant à la paroi des températures  $T_p$  différentes, les écarts totaux:  $\Delta T = T_p - T_0$ , s'étageant de 14 à 50°C. Pour une vitesse donnée, les profils réduits des températures ne subissent que de faibles modifications en fonction de  $\Delta T$ , et dont nous étudierons les effets lors du calcul des diffusivités thermiques.

### C. Valeurs numériques des diffusivités

Les valeurs numériques montrent que  $v_t$  et  $a_t$  passent par un maximum pour une certaine excentration  $\mathcal{E}_1$  (nous désignerons par  $v_{t1}$  et  $a_{t1}$  les valeurs maximales correspondantes).

Aussi bien pour  $a_t$  que pour  $v_t$ , la position de ce maximum ne dépend pas de la vitesse, mais elle n'est pas la même pour la diffusivité thermique et la viscosité cinématique.

Lorsque  $x$  augmente, le maximum de  $a_t$  se déplace en se rapprochant de celui de  $v_t$ , ce qui correspond dans ces conditions au phénomène signalé ci-dessus: le profil des températures se rapproche du profil des vitesses.

Le Tableau 1 donne les valeurs de  $v_{t0}$ ,  $v_{t1}$ ,  $a_{t0}$  et  $a_{t1}$  pour les différentes vitesses  $U_{co}$  ou les

Tableau 1.

$U_{co}$ , cm/s et $Re$	631	25800	1011	41500	2020	82500	3051	12500
$v_{t0}$ , cm <sup>2</sup> /s	3,42			9,15		14,1		25
$v_{t1}$ , cm <sup>2</sup> /s	5			12,6		19		36
$T_p - T_0$ , °C	—		24,5	49,2	14,4	31,2		10,6
$a_{t0}$ , cm <sup>2</sup> /s	—		17	16	36	34		45
$a_{t1}$ , cm <sup>2</sup> /s	—		21	20,5	40,5	40,6		53

divers nombres de Reynolds calculés à partir du diamètre hydraulique de la conduite.

Sur la Fig. 5a, nous avons tracé les courbes de répartition de  $v_t/v_{t1}$  en fonction de  $\mathcal{E}$ . La Fig. 5b représente les variations de  $a_t/a_{t1}$  en fonction de  $\mathcal{E}$ . Il est possible de faire passer par les différents points expérimentaux une courbe dont l'allure est semblable à celle donnant  $v_t/v_{t1}$ . Le maximum se trouve à  $\mathcal{E}_1 = 0,5$  environ, nettement décalé vers l'axe par rapport au maximum de  $v_t/v_{t1}$ .

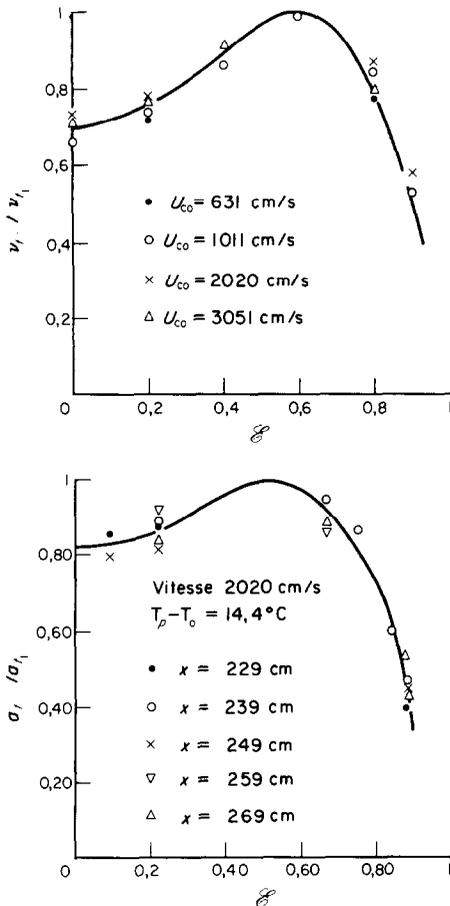


FIG. 5. (a) Variations de  $v_t/v_{t1}$  en fonction de  $\mathcal{E}$ . (b) Variations de  $a_t/a_{t1}$  en fonction de  $\mathcal{E}$ .

D. Les phénomènes en conduite circulaire

Le profil des vitesses réduites en conduite circulaire est pratiquement le même qu'en conduite rectangulaire. Les courbes réduites  $v_t/v_{t1}$  ont la même allure. La position du maximum est la même:  $\mathcal{E}_1 = 0,6$ . Les valeurs numériques sur l'axe sont un peu plus petites pour la conduite circulaire ( $v_{t0}/v_{t1} = 0,6$  au lieu de 0,7 pour la conduite rectangulaire). Le tableau 2 donne les valeurs  $v_{t0}$  et  $v_{t1}$  pour la conduite circulaire, à différentes vitesses, ou à nombres de Reynolds calculés à partir du diamètre de la conduite.

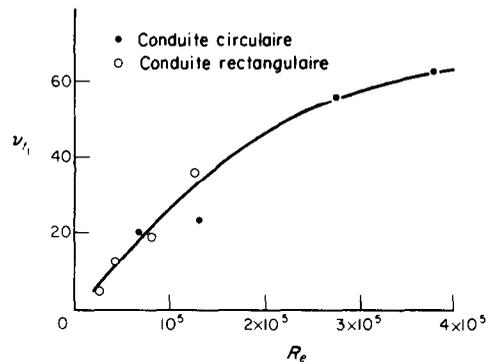


FIG. 6. Variations de  $v_{t1}$  avec le nombre de Reynolds.

Sur la Fig. 6 nous avons représenté les variations de  $v_{t1}$  en fonction du nombre de Reynolds. La courbe obtenue à l'allure de celle trouvée par Cleriot [6].

2.3 Les Sillages Centres

A. Etude théorique élémentaire des lois de répartition des vitesses et des températures

On admet que dans la région médiane, le sillage du fil, dont la longueur est évidemment limitée, se confond avec celui d'un fil de longueur indéfinie, le problème est donc à deux dimensions.

Tableau 2.

$U_{co}$ , cm/s et $Re$	500	66500	982	13 100	2045	273000	2830	377000
$v_{t0}$ , $\text{cm}^2/\text{s}$		10		23		43		46
$v_{t1}$ , $\text{cm}^2/\text{s}$		20		26		55,5		62

On pose (en conformité avec ce qui a été expliqué en 2.1) que les équations indéfinies sont les mêmes que pour l'écoulement laminaire. Après discussion des ordres de grandeurs de leurs différents termes (discussion que nous ne pouvons reproduire ici [17]), il est permis de leur apporter de grandes simplifications, si bien que le groupe des équations de Navier et de Fourier se réduit à :

$$\left. \begin{aligned} U_s \frac{\partial U_s}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( v_t \frac{\partial U_s}{\partial y} \right) \\ U_s \frac{\partial T_s}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( a_t \frac{\partial T_s}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} (5)$$

On a admis que la composante transversale  $v_s$  de la vitesse dans le sillage est assez petite pour pouvoir être négligée.

$U_s$  et  $T_s$  sont des fonctions de  $x$  et de  $y$  puisque nous supposons un phénomène à deux dimensions (et de symétrie plane).

Nous prendrons pour fonctions inconnues les perturbations que le fil apporte à l'écoulement, elles sont définies par les relations :

$$U = U_c - U_s \quad \text{et} \quad T = T_s - T_c \quad (6)$$

$U$  mesure le "ralentissement" du fluide que produit le fil,

$T$  mesure son "échauffement" (dans les expériences où le fil est chauffé),

$T_c$  est la température de l'écoulement amont, que nous avons écrit  $T_0$  au paragraphe précédent, et qui est une constante.

La transformation (6), appliquée aux équations (5), conduit à :

$$\left. \begin{aligned} (U_c - U) \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( v_t \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ (U_c - U) \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( a_t \frac{\partial T}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} (7)$$

$$\left. \begin{aligned} U_c \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( v_t \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ U_c \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( a_t \frac{\partial T}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} (7')$$

Mis à part le voisinage immédiat du fil où le fluide est arrêté, le ralentissement  $U$  est petit devant la vitesse  $U_c$  de l'écoulement général, et peut, par conséquent, être négligé dans le facteur  $(U_c - U)$ , d'où les équations (7') que nous adopterons à l'avenir.

Dans une première approximation (qui nous le verrons, est insuffisante), nous supposons que, comme en écoulement laminaire,  $v_t$  et  $a_t$  sont des constantes, et nous adopterons les solutions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{B_1}{\sqrt{x}} \cdot \text{exponentielle} \left[ -\frac{y^2 \cdot U_{c0}}{4 \cdot x \cdot v_t} \right] \\ T &= \frac{B_2}{\sqrt{x}} \cdot \text{exponentielle} \left[ -\frac{y^2 \cdot U_{c0}}{4 \cdot x \cdot a_t} \right]. \end{aligned} \right\} (8)$$

Ces solutions représentent bien une perturbation qui s'annule à l'infini; elles ont une singularité compliquée à l'origine, dont nous laisserons, pour l'instant, l'interprétation de côté.

Les perturbations  $U$  et  $T$  sont maximum sur l'axe; pour  $y = 0$ , on a :

$$U_{\max} = \frac{B_1}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad T_{\max} = \frac{B_2}{\sqrt{x}}.$$

**B. Resultats experimentaux**

*Les répartitions en lois de Gauss.* Les répartitions en  $y$ , à  $x$  constant, des vitesses et des températures suivent avec précision des lois de Gauss sur la majeure partie de la largeur du sillage, alors que, sur les bords, on enregistre une divergence, relativement faible cependant.

Pour montrer que les répartitions sont bien en loi de Gauss, nous transformons les relations (8) de la façon suivante :

$$\sqrt{\left( \log \frac{U_{\max}}{U} \right)} = y \cdot \frac{U_{c0}}{4 \cdot x \cdot v_t}$$

$$\sqrt{\left( \log \frac{e_{\max}}{e} \right)} = y \cdot \frac{U_{c0}}{4 \cdot x \cdot a_t}$$

Nous avons substitué aux températures  $T$  et  $T_m$  dans le sillage, les f.e.m. thermoélectriques

correspondantes qui leurs sont proportionnelles.

Il suffit alors de calculer, à partir des résultats expérimentaux, les quantités

$$\sqrt{\left(\log \frac{U_{\max}}{U}\right)} \quad \text{et} \quad \sqrt{\left(\log \frac{e_{\max}}{e}\right)}$$

et de les reporter sur un graphique en fonction

petites et moyennes valeurs de  $y$ . Ensuite, les points expérimentaux sont situés au-dessous de la droite; ces points correspondent aux bords du sillage. Les écarts ainsi enregistrés correspondent à des températures réelles plus élevées que les températures calculées par la loi de Gauss.

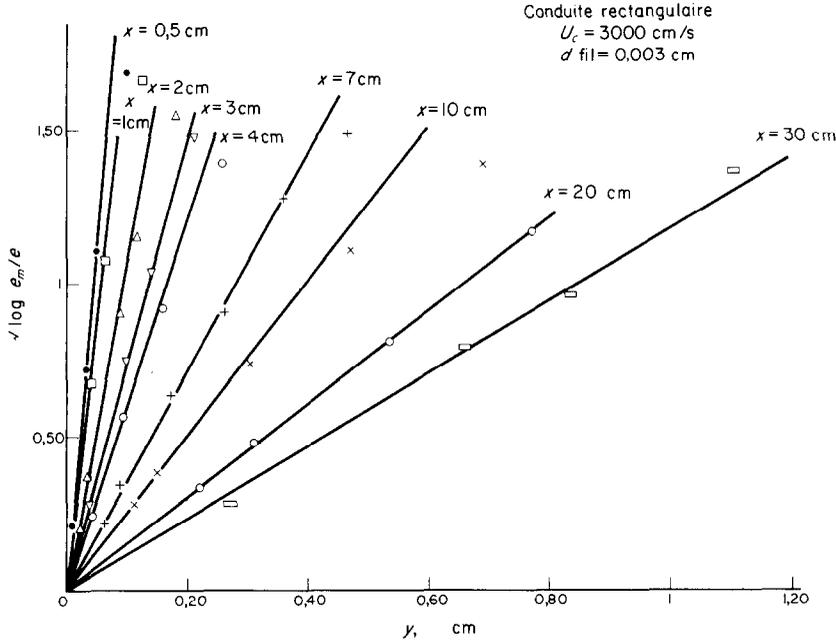


FIG. 7. Variations de  $\sqrt{(\log e_m/e)}$  en fonction de  $Y$ .

de  $y$ . Prenons l'exemple du fil de 0,003 cm placé et chauffé en conduite rectangulaire. La vitesse au droit du fil est  $U_{c0} = 3000$  cm/s et les plans de sondage sont situés à des distances  $x$  du fil de : 1, 2, 3, 4, 7, 10, 20 et 30 cm. La Fig. 7 reproduit le graphique correspondant, chacune des huit droites correspondant à la distance  $x$  portée en cote.

Les mesures de vitesses ne sont possibles que pour les distances moindres, mais les courbes représentatives de  $\sqrt{[\log (U_{\max}/U)]}$  en fonction de  $y$ , pour un  $x$  donné, conduisent aux mêmes conclusions.

Pour chaque valeur de  $x$ , nous voyons qu'il est possible de tracer une droite passant par l'origine et les points correspondants aux

Les "survitesses". Nous dirons qu'il y a "survitesse" en un point M du sillage lorsque la vitesse de l'écoulement  $y$  est supérieure à ce qu'elle serait en ce point en l'absence du fil. Revenant aux notations de la relation (6), dans les régions de survitesses on a :  $U_s < U_c$ , donc  $U < 0$ .

Le phénomène que nous avons mis en évidence est que le fluide refoulé par le sillage où la vitesse est réduite, s'écoule sur les bords du sillage, formant une sorte de bourrelet où la vitesse dépasse nettement celle de l'écoulement naturel.

Le phénomène a été observé dans les sillages des fils de diamètres 0,010 et 0,064 cm; pour le fil le plus fin, 0,003 cm, ces augmentations locales

de vitesses descendent vraisemblablement au-dessous de ce qui est mesurable.

*Variations de la vitesse et de la température en fonction de x sur l'axe.* La théorie élémentaire leur assigne de varier en raison inverse de  $\sqrt{x}$ . Les valeurs de  $U_{\max}$  et de  $T_{\max}$  (ou ce qui revient au même de la f.e.m.  $e_{\max}$ ) sont données directement par l'expérience, on constate ainsi que la loi théorique en  $1/\sqrt{x}$  n'est pas vérifiée, et les écarts sont importants.

obtenues est la même pour la vitesse de 3000 cm/s. Les résultats sont similaires pour la conduite circulaire.

La divergence à la loi théorique se manifeste par l'écart à la droite passant par l'origine. Nous voyons que cet écart devient important dès que x dépasse quelques centimètres.

On peut représenter de manière empirique les variations de  $U_{\max}$  et  $T_{\max}$  par des lois de la forme  $C \cdot x^n$ . Les formules ainsi obtenues per-

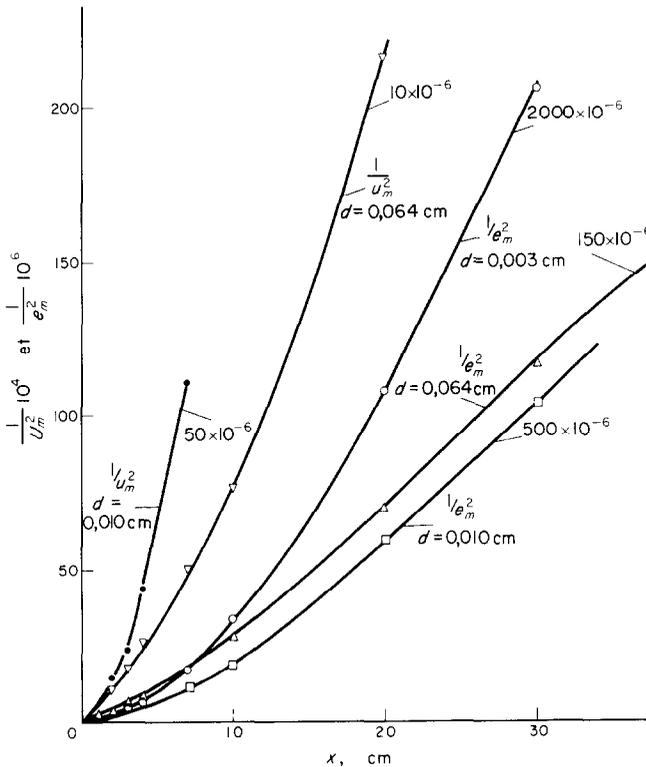


FIG. 8. Variations de  $1/e_m^2$  et de  $1/U_m^2$  en fonction de x.

Sur la Fig. 8 nous avons représenté la variation de  $1/U_{\max}^2$  et  $1/e_{\max}^2$  en fonction de x pour les trois diamètres de fil (en conduite rectangulaire). La vitesse choisie est  $U_{c0} = 1000$  cm/s. Les échelles pour les ordonnées sont quelconques (les nombres cerclés représentent, pour chaque courbe, l'ordonnée réelle de  $1/e_{\max}^2$  ou  $1/U_{\max}^2$  :  $e_{\max}$  en  $\mu V$  et  $U_{\max}$  en cm/s). L'allure des courbes

mettent une représentation correcte des résultats expérimentaux lorsque les distances x deviennent supérieures à  $100 d$ . L'exposant n, qui est bien entendu négatif, dépend du diamètre du fil et dans une faible mesure de la vitesse. Il est supérieur en module à la valeur théorique 0,5 et il s'en rapproche lorsque le diamètre augmente (Tableau 3).

Tableau 3.

Diamètre du fil en cm	0,003	0,010	0,064	0,300
$n, U_{co} = 1000$ cm/s	0,83	0,76	0,62	---
$n, U_{co} = 3000$ cm/s	0,78	0,73	0,61	0,53

Pour le fil de 0,010 cm et la conduite circulaire l'exposant  $n$  est un peu supérieur aux valeurs du tableau ci-dessus.

**Largeur des sillages.** La largeur du sillage est délicate à définir, ses limites étant floues. Nous conviendrons de caractériser cette largeur à l'abscisse  $x$ , par la distance entre les points  $P_1$  et  $P_2$  des courbes de répartition (Fig. 9) dont les ordonnées sont la moitié de la valeur maximale.

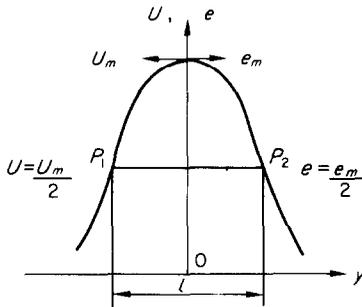


FIG. 9. Allure des profils de vitesse ou de température dans le sillage d'un fil centré.

Nous noterons cette distance, par  $l$ , et nous dirons "largeur du sillage", étant entendu qu'il s'agit de la largeur conventionnelle ci-dessus définie.

Dans le Tableau 4 nous donnons, pour le fil de 0,010 cm et pour la vitesse sur l'axe de 3000 cm/s, la largeur du sillage thermique ainsi que l'ordre de grandeur de la largeur "réelle" de ce même sillage en définissant les limites par

les distances à l'axe au-delà desquelles la f.e.m. expérimentale est pratiquement nulle.

Entre la largeur obtenue pour  $e = e_{max}/2$  et pour  $e$  voisin de zéro, il y a un facteur multiplicatif compris entre 2 et 3.

La largeur des sillages augmente de manière importante avec le diamètre des fils et diminue faiblement quand la vitesse croît.

**Les diffusivités turbulentes.** Pour calculer les diffusivités on admet les équations (7). On fait abstraction des variations de  $B_1/\sqrt{x}$  ou  $B_2/\sqrt{x}$  en leur substituant les valeurs expérimentales directes  $U_{max}$  et  $T_{max}$  mesurées sur l'axe. On exprime ensuite :

$$\frac{U_{co}}{4 \cdot x \cdot v_t} = p_U^2 \quad \text{et} \quad \frac{U_{co}}{4 \cdot x \cdot a_t} = p_T^2$$

où  $p_U$  et  $p_T$  sont les pentes des droites de la Fig. 7.

Désignons par  $v_1$  et  $a_1$  les valeurs des viscosités et des diffusivités ainsi calculées. Sur la Fig. 10, nous avons représenté les variations de  $v_1$  et de  $a_1$ , pour les différents fils utilisés en conduite rectangulaire et tracé les niveaux  $v_{t0}$  et  $a_{t0}$  correspondants aux diffusivités mesurées dans l'écoulement naturel (obtenues au paragraphe précédent). Ces courbes mettent en évidence les variations importantes que subissent les diffusivités de sillages en fonction de la distance au fil. Elles montrent aussi que ces diffusivités sont toujours nettement inférieures à celles de l'écoulement naturel, même aux plus grandes valeurs de  $x$  expérimentées.

$v_1$  augmente toujours lorsqu'on s'éloigne du fil,  $a_1$  au contraire commence par décroître pour, après passage par un minimum, suivre une allure de croissance analogue à celle de  $v_1$  (le phénomène est particulièrement apparent sur la courbe  $d = 0,064$  cm,  $U_{co} = 3000$  cm/s).

Tableau 4.

$x$ , cm	1	2	4	10	20	30	40
$l$ , cm	0,146	0,177	0,30	0,61	1,08	1,52	1,82
$l$ , cm réel	0,44	0,6	1,2	1,6	2,5 à 3	3 à 4	4 à 5

Le minimum de  $a_1$  se trouve toujours à proximité du fil, si bien qu'à l'avenir nous ferons abstraction de ce phénomène, dû vraisemblablement à la forte diminution de la masse volumique du fluide (donc de sa capacité thermique) au voisinage immédiat du fil, consécutive à un fort échauffement.

Le résultat fondamental est donc l'accroissement de  $v_1$  et  $a_1$  avec  $x$ , dont l'importance

pas de  $y$ , cette dernière hypothèse trouvant sa justification dans le fait expérimental que vitesses et températures sont, pour un  $x$  donné, très correctement réparties en loi de Gauss.

Effectuons, dans le groupe (7'), le changement de variable suivant :

$$v_t = \frac{\partial z_U}{\partial x} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial z_U} \frac{\partial z_U}{\partial x} = v_t \frac{\partial U}{\partial z_U}$$

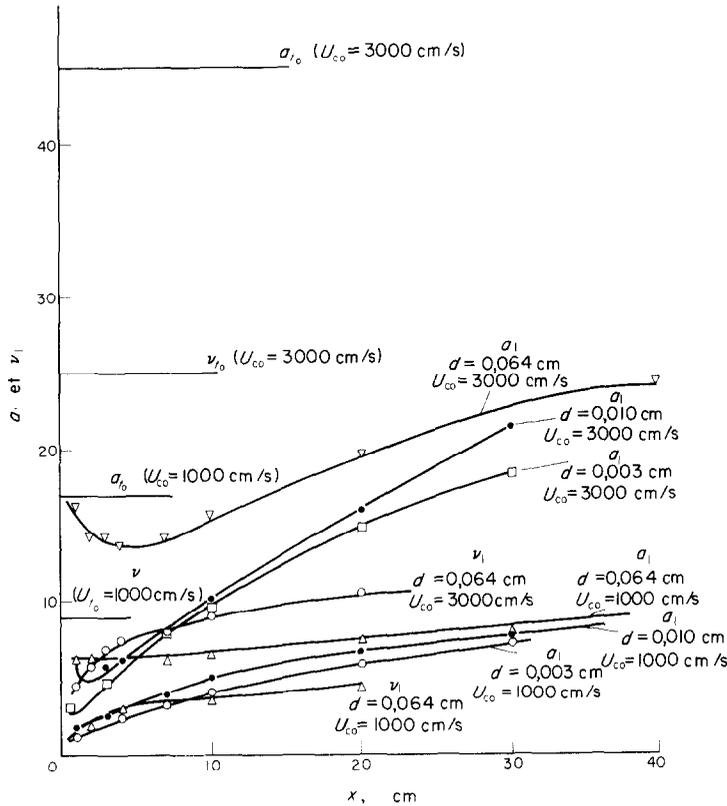


FIG. 10. Variations des diffusivités avec  $x$ .

défend qu'on le tienne pour phénomène accessoire, ce qui remet en question les hypothèses faites pour l'intégration des équations (7').

C. Retour sur l'intégration des équations

Reprenons l'intégration en admettant que  $v_t$  et  $a_t$  peuvent dépendre de  $x$ , mais ne dépendent

et de même pour  $a_t$ , on voit immédiatement que les équations (7') deviennent :

$$U_{co} \frac{\partial U}{\partial z_U} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad U_{co} \frac{\partial T}{\partial z_T} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (9)$$

Ce sont les équations (7') dans lesquelles on a fait  $v_t = 1$  et  $a_t = 1$  (donc des constantes).

Les relations (8), se transposent alors immédiatement en variable  $z$ :

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{B_1}{\sqrt{z_U}} \text{exponentielle} \left[ -\frac{y^2 U_{co}}{4z_U} \right] \\ T &= \frac{B_2}{\sqrt{z_T}} \text{exponentielle} \left[ -\frac{y^2 U_{co}}{4z_T} \right] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

et la solution est maintenant analytiquement correcte.

de 0 à  $x$ , des diffusivités locales. L'expression pour  $v_1$  est identique à celle donnant  $a_1$ .

Les fonctions  $z_U(x)$  et  $z_T(x)$  ayant été déterminées à partir des nombres expérimentaux, nous pouvons calculer les diffusivités locales dans le sillage, par les relations:

$$v_t = \frac{dz_U}{dx} \quad \text{et} \quad a_t = \frac{dz_T}{dx} \quad (11)$$

Tableau 5.

$x$ (cm)	$d$ (cm)	$a_1$ (cm <sup>2</sup> /s)	$a_t$ (cm <sup>2</sup> /s)	$x$ (cm)	$d$ (cm)	$a_1$ (cm <sup>2</sup> /s)	$a_t$ (cm <sup>2</sup> /s)
2	0,003	1,6	2,1	20	0,003	5,9	8,8
	0,010	2,1	2,8		0,010	7,8	8,7
	0,064	6,4	4,8		0,064	7,65	8,6
5	0,003	2,6	4,2	30	0,003	7,2	10,6
	0,010	3,3	5,5		0,010	7,8	10,7
	0,064	6,4	6,5		0,064	8,05	10,7
10	0,003	4	7,8	40	0,003	8,7	11
	0,010	5,1	7,3		0,010	9,15	11,4
	0,064	6,75	7,6		—	—	—

Les valeurs numériques de  $z_U$  et  $z_T$  peuvent s'obtenir à partir des résultats expérimentaux de la même façon que pour les  $v_1$  et  $a_1$  du paragraphe précédent. Les pentes des droites de la Fig. 7 par exemple permettent d'exprimer, pour le fil de 0,003 cm,

aussi bien  $z_T = \frac{U_{co}}{4 \cdot p_T^2}$  que  $a_1 = \frac{U_{co}}{4 \cdot x \cdot p_T^2}$ .

En définitive, on a :

$$a_1 = \frac{z_T}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x a_t \cdot dx'$$

La diffusivité  $a_1$ , introduite par les considérations élémentaires précédentes, apparaît ainsi comme la valeur moyenne, prise sur le parcours

Nous donnons, dans le Tableau 5 les valeurs de  $a_1 = z_T/x$  et de  $a_t = dz_T/dx$  pour les différents fils, en fonction de  $x$ . Ces nombres correspondent à une vitesse sur l'axe de 1000 cm/s.

Les diffusivités augmentent lorsqu'augmente la vitesse de l'écoulement, suivant une loi qui dépend des diamètres et des distances aux fils, et qui correspond à un accroissement moindre que la proportionnalité: lorsque la vitesse  $U_{co}$  sur l'axe est multipliée par 3, passant de 1000 cm/s à 3000 cm/s,  $a_t$  se trouve multiplié en moyenne par 2,5, ce facteur pouvant cependant atteindre 2,9 à grande distance du fil.

Le rapport  $Z_T = 4z_T/U_{co}$  dépend dans une certaine mesure de la vitesse, et par conséquent, on ne peut pas représenter ses variations en fonction de  $x$ , pour un fil donné, par une seule courbe, qui serait valable pour tous les  $U_{co}$ .

Sur la Fig. 11 sont tracées les courbes de  $z$  en fonction de  $x$ , attachées à la vitesse  $U_{co} = 1052$  cm/s, chaque courbe correspond à un diamètre de fil.

La diffusivité vraie  $a_1$  est mesurée par la pente de la tangente à la courbe. La diffusivité moyenne  $a_1$  est la pente de la courbe.

se maintiennent dans un intervalle étroit : entre 0,50 et 0,55.

Pour la conduite circulaire, on obtient des résultats identiques du point de vue qualitatif. Les nombres de Prandtl turbulents sont plus élevés que les nombres de Prandtl précédents.

La comparaison des Tableaux 1 et 5, montre

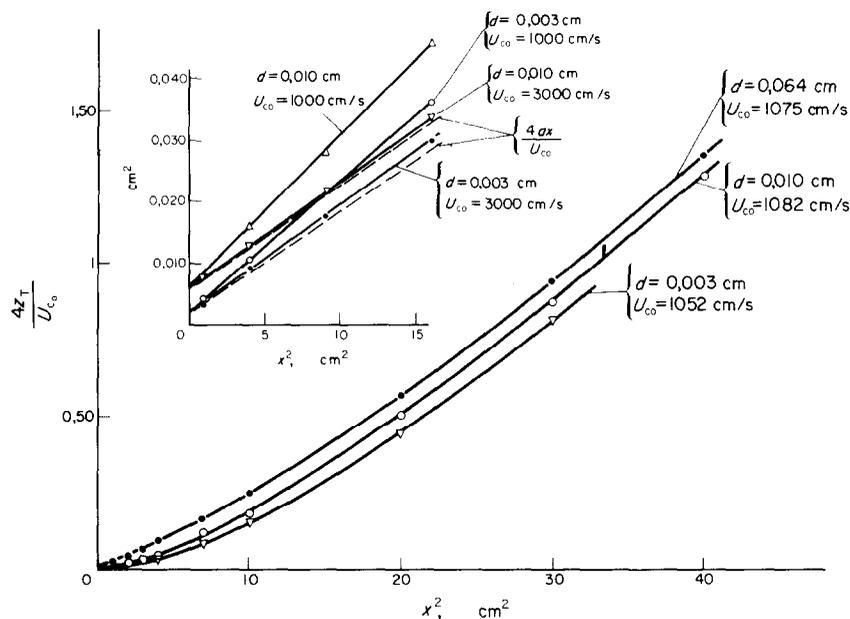


FIG. 11. Variations de  $4z_T/U_{co}$  en fonction de  $x$  pour des fils de différents diamètres.

Ces courbes montrent, et le Tableau 5 précise, que les diffusivités attachées aux différents fils sont d'autant plus petites que le fil est plus fin ; les différences, importantes aux petites valeurs de  $x$ , s'atténuent lorsqu'on s'éloigne du fil, et ont pratiquement disparues lorsque  $x$  atteint 10 cm.

Les viscosités cinématiques vraies se calculent à partir de  $z_v$ , et conduisent à des résultats analogues, moins complets cependant car les mesures ne peuvent atteindre que des distances  $x$  plus limitées. Les rapports  $v_t/a_p$ , c'est-à-dire les nombres de Prandtl, dépendent de tous les paramètres définissant le phénomène, mais

que, même à grande distance du fil, la diffusivité thermique vraie de sillage est encore très inférieure à la diffusivité de l'écoulement naturel (11 au lieu de 17 CGS). Nous pensons cependant qu'à très grande distance, il finirait par y avoir égalité ; bien que correspondant à des conditions différentes l'expérience suivante semble l'indiquer.

Nous avons étudié le sillage aérodynamique, en conduite circulaire, d'une tige de 0,300 cm, et calculé la viscosité cinématique vraie derrière cette tige, pour une vitesse de 3000 cm/s et à la distance  $x = 81$  cm de la tige, on obtient ainsi  $v_t = 41,5$   $cm^2/s$ , alors que pour l'écoulement

naturel dans les mêmes conditions on a  $v_{10} = 43 \text{ cm}^2/\text{s}$ .

2.4 Etude des Sillages Excentrés

Plaçons maintenant le fil, non plus sur l'axe de la conduite, mais à une certaine distance  $Y$  de celui-ci (Figs. 12 et 13). Les axes de coordonnées  $Ox$  et  $Oy$  sont repérés par rapport au fil. La vitesse  $U_c$  de l'écoulement naturel qui, sur l'axe, pouvait être considérée comme constante et égale à  $U_{c0}$ , est une fonction de  $y$ .

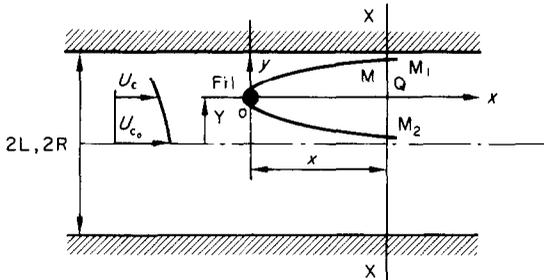


FIG. 12. Sillage excentré.

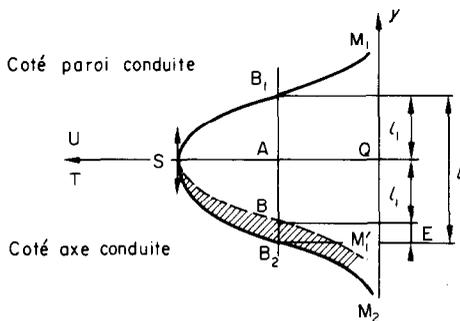


FIG. 13. Allure des profils de vitesse ou de température dans le sillage dissymétrique.

La vitesse  $U_c$  ayant été déterminée comme il a été dit précédemment, on mesure les vitesses  $U_s$  dans le sillage pour une suite de plans de sondage,  $XX$ , définis par leurs distances  $x$  au fil (Fig. 12). On en déduit la vitesse  $U = U_c - U_s$  en fonction de la coordonnée  $y$ . Cette vitesse, maximale au point  $Q$ , décroît de part et d'autre pour devenir pratiquement nulle sur les limites  $M_1$  et  $M_2$  du sillage. La Fig. 13 représente schématiquement la loi de répartition des vitesses  $U$  (dans la section  $M_1QM_2$  de la Fig. 12).

Le sommet  $S$  de la courbe correspond à la vitesse maximale  $U_m$ , en règle générale, contrairement à ce qui a lieu sur l'axe, les branches  $SB_1M_1$  et  $SB_2M_2$  ne sont pas symétriques par rapport à  $SQ$ . Traçons en  $SB'_1M'_1$ , la courbe symétrique de la branche la plus proche de l'axe, qui est ici  $SB_1M_1$ . Les courbes  $SB'_1M'_1$  et  $SB_2M_2$  délimitent dans le plan de la figure une surface que nous appellerons "la zone d'étalement du sillage". Cette zone a été hachurée sur la Fig. 13. Par rapport au point  $Q$  de la Fig. 12, elle est située du côté de l'axe de la conduite. En fait cette zone peut tout aussi bien être en sens inverse, c'est-à-dire que l'étalement du sillage se produit alors vers la paroi.

Conventionnellement, nous définissons la "largeur" du sillage et la mesure de "l'étalement" de la façon suivante: nous coupons la courbe par la parallèle à  $Qy$  d'ordonnée  $QA = AS = U_m/2$ , (Fig. 13) et nous posons:

$$B_1B_2 = l \quad AB'_1 = AB'_2 = l_1 \quad E = l - 2l_1$$

$l$ , mesure la "largeur" conventionnelle du sillage, et  $E$  "l'étalement".

Les grandeurs qui viennent d'être définies pour le sillage aérodynamique peuvent l'être pour le sillage thermique.

Nous avons expérimenté aux excentrations  $\epsilon = 0,43$  et  $\epsilon = 0,83$ : en règle générale lorsque  $x$  croît, on observe:

- en premier lieu, une région où le sillage est symétrique,
- ensuite, une région où la dissymétrie apparaît avec étalement vers l'axe,
- après être passé par un maximum, cette dissymétrie s'atténue puis disparaît pour faire place, aux grandes valeurs de  $x$  et après une zone de quasi-symétrie, à un sillage étalé vers la paroi.

Ces résultats sont qualitativement les mêmes pour le sillage thermique.

Les variations de la vitesse de l'écoulement, qui se traduisent ici par une variation de la vitesse  $U_c$  à l'ordonnée du fil, ne modifient pas

les résultats précédents, la largeur  $l$  des sillages diminue cependant légèrement quand la vitesse augmente.

Dans certains cas, en particulier pour le sillage thermique du fil de 0,064 cm, la seconde région n'existe pas, ou en tout cas l'étalement vers l'axe est insuffisant pour être mesurable, et on passe directement du sillage symétrique au sillage étalé vers la paroi.

Nous avons constaté que la largeur relative  $l/d$  des sillages est plus importante pour les fils fins (0,003 cm) que pour les fils de plus gros diamètres (0,064 cm). Enfin la largeur  $l$  des sillages et la largeur relative  $l/d$  augmentent avec l'excentration.

Notons enfin que les dissymétries dont il est fait état sont petites, elles atteignent au maximum 10 pour cent de la largeur du sillage.

En conduite circulaire, les phénomènes dans les sillages excentrés sont qualitativement les mêmes qu'en conduite rectangulaire. Cependant les largeurs  $y$  sont légèrement supérieures, les étalements plus faibles (évidemment à conditions semblables, c'est-à-dire même fil, même excentration et vitesses locales  $U_c$  égales).

*Calcul des diffusivités.* Malgré les dissymétries, il est possible de définir et d'évaluer les viscosités et les diffusivités thermique turbulentes locales. Ainsi, en conduite rectangulaire, on obtient :

$U_{c_0} = 1000 \text{ cm/s}$	{	pour $\mathcal{E} = 0,43$	{	$v_r = 3,75 \text{ cm}^2/\text{s}$ à $x = 7 \text{ cm}$	(7 $\text{cm}^2/\text{s}$ )
$d = 0,010 \text{ cm}$		pour $\mathcal{E} = 0,83$		$a_r = 14,3 \text{ cm}^2/\text{s}$ à $x = 40 \text{ cm}$	(15,8 $\text{cm}^2/\text{s}$ )
$U_{c_0} = 3000 \text{ cm/s}$	{	pour $\mathcal{E} = 0,43$	{	$a_r = 51 \text{ cm}^2/\text{s}$ à $x = 30 \text{ cm}$	(52 $\text{cm}^2/\text{s}$ )
$d = 0,003 \text{ cm}$		pour $\mathcal{E} = 0,83$		$a_r = 26 \text{ cm}^2/\text{s}$ à $x = 7 \text{ cm}$	(46 $\text{cm}^2/\text{s}$ )
$U_{c_0} = 3000 \text{ cm/s}$	{	pour $\mathcal{E} = 0,43$		$v_r = 18 \text{ cm}^2/\text{s}$ à $x = 20 \text{ cm}$	(32 $\text{cm}^2/\text{s}$ )
$d = 0,064 \text{ cm}$				$a_r = 50 \text{ cm}^2/\text{s}$ à $x = 30 \text{ cm}$	(52 $\text{cm}^2/\text{s}$ )

Les nombres entre parenthèses correspondent aux diffusivités mesurées dans l'écoulement naturel (en l'absence du fil).

L'examen de ces résultats montre que les valeurs de  $v_r$  et  $a_r$  tendent vers les valeurs des diffusivités mesurées dans l'écoulement naturel, plus rapidement que sur l'axe de la conduite.

Les nombres de Prandtl turbulents calculés dans les deux conduites varient légèrement d'une valeur à l'autre de l'excentration.

### 3. INTERPRETATION DES RESULTATS A L'AIDE DES THEORIES DE DIFFUSION

On admet que les masses matérielles qui diffusent conservent, sur un certain parcours, les caractéristiques de leurs points de départ, et qui sont :

leurs températures pour la transmission de la chaleur,

leurs quantités de mouvement pour le frottement, mais les phénomènes sont,

dans ce cas, beaucoup moins nets, si bien que certaines théories font intervenir des transferts portant sur d'autres grandeurs mécaniques.

Les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  (et par suite  $\alpha$  et  $\nu$ ) s'expriment en fonction des paramètres qui définissent la diffusion de la matière. Les deux paramètres fondamentaux sont : les flux de masses qui s'échangent à travers l'élément superficiel de contrôle, et la longueur sur laquelle se conservent, du moins en moyenne, les températures et les quantités de mouvement, ces longueurs déterminant les déséquilibres thermique et mécanique, au niveau de l'élément de surface d'échange, des masses qui le traversent par diffusion dans les deux sens.

#### 3.1 Théorie de Bory et Théorie de Taylor

##### A. Théorie continue de Bory (1 à 3)

On considère, (Fig. 14) un écoulement de vitesse uniforme  $U_c$  dirigée parallèlement à l'axe des  $x$ . La tranche MN, de section  $\Delta x = 1 \text{ cm}^2$  (nous supposons un phénomène à deux dimensions) se trouve à l'instant  $t = 0$  en

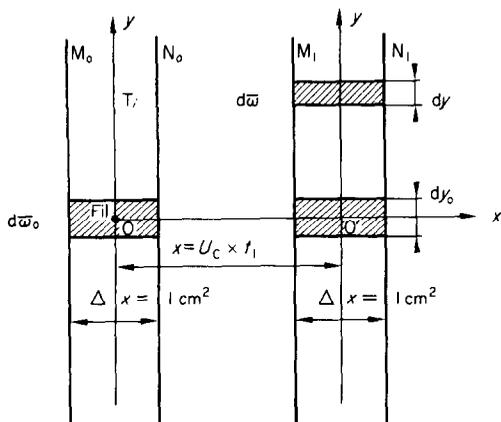


FIG. 14. Schéma de diffusion à une dimension.

$M_0N_0$ , à l'instant  $t_1$  en  $M_1N_1$  défini par l'abscisse  $x_1 = t_1 \cdot U_c$ .

Dans le même temps l'élément de volume  $d\omega_0$  est venu en  $d\omega_1$ , mais la masse  $dm_0$  de matière qu'il renfermait s'est répandue dans un volume de plus grande étendue (avec une densité partielle réduite), nous écrivons la partie  $dm$  de cette masse qui, à l'instant  $t_1$ , se trouve dans l'élément de volume  $d\omega$  sous la forme :

$$dm = f \cdot d\omega \cdot dm_0 \tag{12}$$

cette masse est alors mélangée dans  $d\omega$  avec des masses du fluide qui, à l'origine des temps, étaient dans les éléments de volumes voisins de  $d\omega_0$ .

Le facteur  $f$ , qui définit la fraction  $f \cdot d\omega$  de la masse initiale  $dm_0$  se trouvant à l'instant  $t_1$  dans  $d\omega$  est une fonction des coordonnées de position de  $d\omega_1$  et de  $d\omega$  ainsi que du temps.

En premier lieu, nous schématiserons en admettant que la diffusion ne se produit que suivant la direction  $y$  (on peut montrer que ce schéma permet une étude correcte des phénomènes auxquels nous l'appliquerons). Dans ces conditions, les positions de  $d\omega_1$  et  $d\omega$  sont entièrement définies par les ordonnées  $y_0$  et  $y$ , et on a :

$$d\omega_0 = d\omega_1 = \Delta x \cdot dy_0 = dy_0$$

et de même  $d\omega = dy$ .

Ceci posé, nous ferons l'hypothèse que: la fonction  $f$  s'exprime par la seule combinaison de variables :

$$\alpha = g(t) \cdot (y - y_0).$$

$g(t)$  ne dépendant que du temps et  $f$  étant par ailleurs paire en  $\alpha$ .

La masse diffusée ne dépend donc que de la distance  $r = |y - y_0|$  des éléments de volume, mais il est essentiel de remarquer que ces éléments jouent des rôles différents:  $dy_0$  est l'élément de volume d'où proviennent les masses diffusées,  $dy$  est l'élément qui les reçoit.

Ceci admis, on explicite  $dm$  sous la forme :

$$dm = \frac{\rho_0}{K_0} \cdot g(t) \cdot F[(y - y_0)g] \cdot dy_0 \cdot dy. \tag{13}$$

$\rho_0$  est la masse volumique totale du fluide supposée uniforme et constante,

$$K_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \cdot d\alpha,$$

est une constante résultant de la normalisation de l'expression de  $dm$ .

Nous laisserons, pour l'instant, la fonction  $F(\alpha)$  indéterminée mais on peut montrer qu'elle est :\*

$$F(\alpha) = \text{exponentielle} [-\alpha^2].$$

La relation (13) permet de résoudre divers problèmes, nous en considérerons deux.

*1er problème (Fig. 15).* On porte son attention sur la matière qui est située à l'instant origine au-dessous de  $x'x$ . On se propose de calculer la masse de cette matière (individualisée ainsi à l'instant 0) qui, à l'instant  $t$ , se trouve au-dessus de  $x'x$ . Cette masse est celle qui a traversé le plan  $x'x$  entre les instants 0 et  $t$  (on rapporte à l'élément superficiel  $AB = \Delta x = 1 \text{ cm}^2$ ).

\* La fonction  $F(\alpha)$  est assujettie à vérifier une équation intégrale du type de celle de Chapman-Kolmogoroff [15, 16] en théorie statistique, et dont la solution, dans les conditions du présent problème, est  $e^{-\alpha^2}$ .

Le résultat s'obtient en intégrant (13) successivement sur  $y$  et sur  $y_0$ , il est :

$$m = \rho_0 \cdot \frac{K_1}{K_0} \cdot \frac{1}{g(t)}$$

$K_1$  est une constante numérique, définie par la forme de  $F$ .

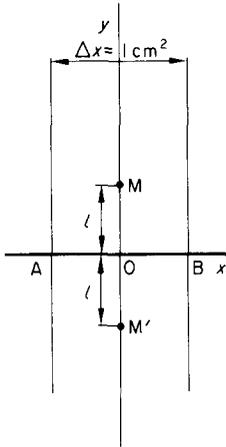


FIG. 15. 1er problème.

Cette masse provient des différents éléments  $dy_0$ , donc, à l'origine des temps, elle se trouvait à des distances  $y_0$  variées; on définit une distance moyenne de provenance  $l$  par la relation :

$$m \cdot l = \int_{y_0 = -\infty}^0 y_0 \cdot dm.$$

Le calcul de  $l$  donne (en valeur absolue) :

$$OM' = l = \frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{1}{g(t)}$$

$K_2$  est une nouvelle constante numérique.

**2ème problème (Fig. 16).** On porte son attention sur la matière qui, à l'instant 0, était dans la particule  $A_0B_0$ ,  $A_1B_1$ , dont la surface de base est  $\Delta x = 1 \text{ cm}^2$ , l'épaisseur  $e$ . On se propose de calculer la masse de cette matière qui, à l'instant  $t$  se trouve dans l'élément de volume  $dy$ .

Il faut ici intégrer (13) sur  $y_0$  entre  $-e/2$  et  $+e/2$ , le résultat est le suivant :

$$\delta m = \frac{\rho_0}{K_0} \cdot dy \cdot g \int_{-e/2}^{e/2} F[(y - y_0)g] \times dy_0 = \frac{\rho_0}{K_0} \cdot dy \cdot \int_{(y-e/2).g}^{(y+e/2).g} F(\alpha) d\alpha.$$

La détermination numérique de  $\delta m$  exige que soit connue la fonction  $F(\alpha)$ .

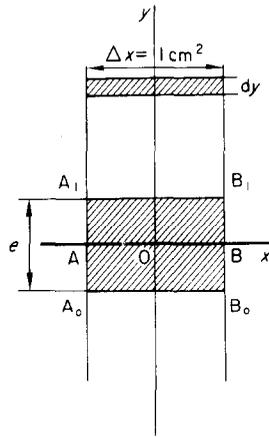


FIG. 16. 2ème problème.

*Calcul des diffusivités*

**Cas du régime permanent.** On suppose que dans l'espace du fluide règne un gradient de température  $\Gamma = \partial T / \partial y$ , uniforme et constant. On doit considérer qu'entre les instants 0 et  $t$ , la masse  $m = \rho_0 \cdot K_1 / K_0 \cdot g$  a traversé l'élément unitaire de surface  $AB$  dans le sens des  $y$  positifs, et qu'une masse égale a traversé en sens inverse. Les températures moyennes de ces masses étaient respectivement celles qui règnent en  $M'$  (tel que  $OM' = l$ ), et en  $M$  symétrique de  $M'$ , d'où, entre elles, un  $\Delta T = T' - T = -2 \cdot l \cdot \Gamma$ . La quantité de chaleur transférée dans

le sens des  $y$  positifs est donc :

$$q = -2 \cdot m \cdot l \cdot C_p \cdot \Gamma = -2 \cdot \rho_0 \cdot C_p \times \frac{K_2}{K_0} \cdot \frac{1}{g^2(t)} \cdot \frac{\partial T}{\partial y}$$

Cette quantité de chaleur devant être proportionnelle au temps, puisque nous supposons le régime permanent, on doit poser :  $1/g^2 = A \cdot t$ , où  $A$  est une constante de proportionnalité qui définit la vitesse de diffusion.

Il suffit alors d'identifier à  $q = -\lambda \cdot \partial T / \partial y \cdot t$  pour exprimer la diffusivité thermique

$$a = \frac{\lambda}{C_p \cdot \rho_0} = 2 \cdot \frac{K_2}{K_0} \cdot A \tag{14}$$

calcul analogue fait sur le transfert de quantité de mouvement donne :

$$v = \frac{\mu}{\rho} = 2 \cdot \frac{K_2}{K_0} \cdot A$$

Comme dans la théorie moléculaire élémentaire de Maxwell, on obtient  $v = a$ , c'est-à-dire un nombre de Prandtl égal à 1, ce qui n'est pas parfaitement exact.

*Transposition aux sillages.* On suit dans sa marche une tranche  $\Delta x$  (Fig. 14). A l'instant zero elle est en 0, au niveau du fil, à l'instant  $t$ , elle s'est déplacée de  $x = U_c \cdot t$ , relation qui établit la liaison entre espace et temps. A son passage en 0, la matière constituante du volume élémentaire  $d\omega_0$  a été portée à la température initiale  $T_i$ .

Nous prenons pour origine des températures, celle de l'écoulement amont, et nous admettons que les masses qui diffusent conservent leur énergie thermique initiale.

A l'instant  $t$ , l'élément  $dy$  est donc constitué par le mélange d'une masse  $dm$  à la température  $T_i$ , et de la masse complémentaire  $dm_0 - dm$ , issue d'éléments de volumes dont la température était  $T_0 = 0$ . La température à l'ordonnée  $y$  est donc :

$$T = \frac{C_p \cdot dm \cdot T_i}{C_p \cdot \rho_0 \cdot dy} \tag{15}$$

d'où

$$T = B_3 g(t) e^{-g^2 y^2} \tag{16}$$

On a explicité  $F(x) = -e^{-x^2}$ , fait  $y_0 = 0$  et remplacé  $T_i \cdot dy_0 / K_0$  par la constante  $B_3$  car l'expression de la température au voisinage de l'origine pose un problème dont nous ne pouvons nous occuper ici.

On retrouve la répartition en loi de Gauss que montre l'expérience.

La fonction  $g(t)$  n'est soumise *a priori* à aucune condition. La première idée serait d'admettre qu'elle est la même qu'en régime permanent, à savoir  $g(t) = 1/\sqrt{(At)}$ , mais cela conduirait à une diffusivité indépendante de  $x$ , et par suite ne permettrait pas de représenter les résultats de l'expérience.

*Relation entre la diffusivité thermique  $a_t$  et la fonction  $g$ .* Nous adoptons les définitions de  $a_t = \lambda_t / C_p \cdot \rho$  et de  $q = -\lambda_t \cdot \partial T / \partial y \cdot t$ , ce qui conduit à l'équation indéfinie classique suivante :

$$U_c \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial t} = a_t \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

(où  $a_t$  est indépendant de  $y$ ).

La théorie continue donne la distribution des températures :

$$T = B_3 g(t) F(g^2 \cdot y^2),$$

ce qui donne l'expression de la diffusivité thermique turbulente de sillage avec  $F =$  exponentielle  $(-y^2 \cdot g^2)$  :

$$a_t = -\frac{1}{2g^3} \frac{dg}{dt} = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{g^2} \right) \tag{17}$$

$a_t$  est exprimée en fonction de  $t$ , on obtient l'expression en fonction de  $x$  en substituant :  $t = x / U_c$ .

On peut mettre cette expression de  $a_t$  sous la forme (14) en posant :

$$A = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{g^2} \right), \tag{18}$$

le calcul des constantes  $K_2$  et  $K_0$  fait sur la fonction de distribution  $F(x) = e^{-x^2}$  donne en effet  $K_2 / K_0 = \frac{1}{8}$ . Les formes (18) et (14) sont alors générales, elles déterminent un coefficient  $A$ , constant en régime permanent, fonction de  $t$

dans les sillages, qui mesure la diffusivité de la matière.

Les mêmes calculs effectués sur le transfert de la quantité de mouvement conduisent à une expression de  $v_t$  identique à (17), la fonction  $g^2 y$  est la même puisqu'elle est attachée à la diffusion de la matière. L'expérience ne vérifiant pas cette égalité de  $v_t$  avec  $a_t$ , on doit considérer que les transferts de chaleur et de quantité de mouvement ne sont pas liés à la diffusion des masses matérielles de façon aussi simple qu'il a été supposé. Nous revenons sur cette question en (17), pour l'instant nous nous limiterons à définir deux fonctions  $g$ , que nous noterons  $g_T$  et  $g_U$  et qui seront calculées à partir des fonctions expérimentales  $z_T$  et  $z_U$  par la relation parallèle en  $z_U$  pour  $g_U$ .

#### B. Théorie de Taylor (7 à 14) de la dispersion des particules matérielles

Taylor étudie la dispersion dans le temps des particules matérielles élémentaires à partir d'un élément de volume d'espace. A l'instant  $t = 0$  la particule  $d\omega_0$  (Fig. 14) doit être subdivisée en particules élémentaires qui vont conserver leur individualité au cours de toute la durée de la dispersion. Ces particules élémentaires ont toutes à l'instant origine une vitesse  $U_c$ , ce qui nécessite de suivre la marche de la tranche  $\Delta x$  de l'espace géométrique mobile. A cette vitesse  $U_c$  s'ajoute vectoriellement une composante fluctuante  $v_L$  de vitesse d'où résulte la dispersion latérale  $y$  et une composante fluctuante de vitesse  $U_L$  qui donne une dispersion en  $x$  autour de la tranche  $\Delta x$ .

Taylor établit entre la fluctuation de vitesse  $v_L$  et la distance  $y$  à l'instant  $t_1$  de dispersion de chaque particule, une relation.

Lorsque le temps de diffusion est suffisamment petit, cette relation s'écrit :

$$\overline{y^2} = \overline{v_L^2} \cdot t_1^2. \quad (19)$$

Lorsque le temps de diffusion est grand, elle devient :

$$\overline{y^2} = 2 B \overline{v_L^2} \cdot t_1 + C \quad (20)$$

où  $B$  et  $C$  sont deux constantes.

#### C. Relations entre les deux théories.\* Liaisons entre la diffusivité et les grandeurs mesurées à l'anémomètre à fil chaud

Les théories de Bory et de Taylor se placent l'une en l'autre du point de vue de Lagrange. On peut exprimer la fonction  $g(t)$  de la théorie continue en fonction du carré moyen de la dispersion  $\overline{y^2}$  de Taylor et relier ainsi  $g(t)$  à certaines grandeurs mesurables par anémométrie à fil chaud, ou pouvant être évaluées au prix de quelques approximations par cette méthode anémométrique.

La relation (13) de la théorie continue donne la part ( $dm$ ) de la masse totale ( $dm_0$ ) qui, à l'instant  $t$  se trouve à la distance  $y - y_0$  de son lieu d'origine, d'où la possibilité de calculer le carré moyen des distances auxquelles se trouvent dispersée cette masse  $dm_0$ . Nous désignerons le carré moyen de la distance de dispersion ainsi calculée par  $l^2$ , et il est raisonnable de l'assimiler au carré moyenné de dispersion de Taylor.

$l^2$  se calcule ici par une intégrale et s'exprime en fonction de  $g(t)$  voir (3.1.A) on a :

$$l^2 = \frac{1}{\Delta m_0} \int_{y=y_0}^{y=\infty} (y - y_0)^2 \cdot dm = \frac{1}{2g^2} \quad (21)$$

où

$$\Delta m_0 = \frac{\rho_0}{K_0} \cdot g \cdot dy_0 \int_{y=y_0}^{y=\infty} F[(y - y_0)g] dy. \quad (22)$$

Nous poserons alors qu'il y a identité entre  $l^2$  et  $\overline{y^2}$ , soit :

$$l^2 = \frac{1}{2g^2} \equiv \overline{y^2}. \quad (23)$$

Reprenons les cas extrêmes de la théorie de Taylor.

1er cas — la durée  $t$  est assez grande, la relation (22) donne :

$$l^2 = 2 \cdot B \cdot v_L^2 \cdot t,$$

\* Nous nous plaçons dans le cas du milieu homogène et indéfini. Nous avons étudié (17) les modifications à apporter aux diverses relations précédentes pour le milieu limité hétérogène.

la fonction  $1/g$  s'écrit :

$$\frac{1}{g} = \sqrt{(4 \cdot B \cdot \overline{v_L^2} \cdot t)}$$

Il y a équivalence effective entre les distances de dispersion données par les deux théories. La constante  $A$  de la théorie de Bory, qui détermine les diffusivités, se trouve exprimée en fonction des grandeurs  $B$  et  $\overline{v_L^2}$  qui relèvent de la théorie statistique de la turbulence, elle est en principe mesurable par anémométrie à fil chaud [10, 18].

2ème cas—la durée  $t$  est petite, la relation (21) donne :

$$l^2 = \overline{v_L^2} \cdot t^2, \text{ la fonction } \frac{1}{g} \text{ s'écrit } \frac{1}{g} = \sqrt{(2 \cdot \overline{v_L^2}) \cdot t} \quad (24)$$

$l$  et  $1/g$  se trouvent alors proportionnels à  $t$  et non plus comme il se devrait à  $\sqrt{t}$ . En fait, la particularisation de la fonction  $1/g^2$  en la proportionnalité ( $A \cdot t$ ) au temps, n'intervient que pour adapter les résultats des calculs aux conditions du régime permanent; il n'est donc pas contradictoire avec le principe général de la théorie continue de supposer, en régime transitoire, une loi d'évolution différente, ce qui revient à admettre que la diffusivité  $A$  varie avec le temps.\*

Au § 2.3.C nous avons exprimé les diffusivités de sillage en fonction d'une variable  $z$ .

En confondant la vitesse d'Euler et la vitesse de Lagrange, ce qui est classique et justifié ici, on peut écrire la relation (24) sous la forme :

$$\overline{v_E^2} = \frac{1}{2g^2} \cdot \frac{U_c^2}{x^2} \quad (25)$$

On peut d'autre part relier la fonction  $g(t)$  à la fonction  $z$  que définissent les relations (11) et, admettant l'égalité entre  $z$ , attachée à la diffusion de la matière, et  $z_T$  et  $z_V$ , égalité que

\* Par exemple, les phénomènes de sillages étudiés ci-dessus correspondent, en espace de Lagrange, à un régime variable et nous avons constaté effectivement une variation des diffusivités en fonction de  $x$ , donc de  $t = x/U_c$ .

veut la théorie élémentaire, et quitte à en discuter plus loin, nous comparerons les relations (10) et (16) qui donnent l'une et l'autre la loi de répartition des températures dans le sillage; compte tenu de la liaison  $x = U_c \cdot t$ , cette comparaison conduit à :

$$z = \frac{U_c}{4} \cdot \frac{1}{g^2} \quad (26)$$

On peut donc, par l'intermédiaire de (25) et (26), calculer la fluctuation quadratique moyenne  $\overline{v_E^2}$  (pour laquelle on dispose de quelques mesures anémométriques) à partir de la fonction  $z$  [14, 19].

Remarquons que la fonction  $z$  de la relation (26) correspond à la diffusion de la matière, mais que, en principe, les fonctions  $z_V$  et  $z_T$  du paragraphe (A) devraient lui être égales. Elles seraient alors égales entre elles, ce qui n'est pas de plus, elles dépendent l'une et l'autre du diamètre des fils. Le problème est donc compliqué, et le calcul de  $\overline{v_E^2}$  à partir des valeurs expérimentales de  $z_V$  et de  $z_T$  aux petites valeurs de  $x$ , n'est pas immédiat. En s'appuyant sur des considérations qui seront développées au paragraphe suivant, et à partir d'une discussion de l'ensemble des résultats expérimentaux obtenus pour les petites valeurs de  $x$ , on peut cependant faire quelques évaluations.

Fils fins ( $d = 0,003$  cm et  $0,010$  cm), disposés sur l'axe des conduites.

Vitesse sur l'axe:  $U_{co} = 3000$  cm/s.

Calculs effectués à partir des mesures des diffusivités thermiques (avec correction de conductivité moléculaire [14, 19].

En conduite rectangulaire  $\overline{v_E^2} = 86$  cm/s.

En conduite circulaire  $\overline{v_E^2} = 88$  cm/s.

La précision des mesures étant limitée, on peut admettre qu'il y a égalité entre ces deux valeurs.

Des mesures anémométriques effectuées par Laufer (20) en conduite circulaire donnent :

$\overline{v_E^2} = 80$  cm/s pour une vitesse sur l'axe de 3048 cm/s.

La mesure directe et le calcul à partir de la diffusivité thermique conduisent donc à des résultats qui, s'ils ne concordent pas avec exactitude, sont cependant suffisamment voisins pour ne pas contredire l'assimilation que nous avons faite du  $l^2$  de Bory au  $\overline{y^2}$  de Taylor.

Le calcul de  $\overline{v_E^2}$  à partir des viscosités cinématiques donne un résultat très voisin de celui de Laufer, on trouve :

$$\overline{v_E^2} = 81,5 \text{ cm/s au lieu du } 80 \text{ cm/s de Laufer.}$$

*Interprétation des résultats expérimentaux à partir de la théorie continue.* Nous admettrons qu'il y a une loi de diffusion  $g(t)$  attachée à la matière, donc indépendante du diamètre du fil, et que c'est cette loi qui règle le transfert de la chaleur suivant la théorie élémentaire simple du paragraphe 3.1. Des expériences de Clériot (voir [6]) incitent à penser en l'exactitude de cette hypothèse.

Reste à expliquer pourquoi le  $z_T$  expérimental, qui, en principe, devrait être égal, suivant la relation (26) à  $U_c/4g^2$ , dépend du diamètre du fil.

Considérons la particule  $A_0B_0A_1B_1$  qui à l'instant 0, arrive au contact du fil (Fig. 16); elle se trouve portée à une température initiale  $T_b$ , d'où résulte la transmission de chaleur déterminant la loi de répartition des températures à l'instant  $t$ .

Si on admet que l'épaisseur de la couche fluide initialement chauffée est infiniment petite, la diffusion de la matière conduit à une répartition donnée par la relation (16) ci-dessus, à savoir :

$$T = B_3 g(t) \exp(-g^2 y^2). \quad (16)$$

En réalité l'épaisseur chauffée, qui est celle de la particule  $A_0B_0A_1B_1$ , a une valeur finie  $e_0$ , dont il est à présumer qu'elle dépend du diamètre du fil. Reprenant le raisonnement qui a conduit à la formule (16), et en faisant appel aux résultats du deuxième problème, on obtient :

$$T = B_3 g \int_{-e_0/2}^{+e_0/2} \exp[-g^2(y - y_0)] dy_0. \quad (27)$$

L'idée la plus immédiate est de prendre,

pour valeur  $e_0$ , le diamètre du fil, et, à partir des résultats expérimentaux, de calculer la fonction  $g$ , ce procédé doit être abandonné car les  $g$  des différents fils ne coïncident pas.

Nous ferons donc l'hypothèse suivante :

le  $y_0$  de l'intégrale est au plus égal à  $e_0/2$ , admettons que le  $e_0$  attaché au fil le plus fin (0,003 cm) est suffisamment petit pour que  $y_0$  puisse être négligé devant  $y$ ; la répartition (27) se réduit alors à la répartition (16);  $e_0$  n'intervient plus, et, par suite,  $g(t)$  se déduit immédiatement des résultats expérimentaux.

Cela revient en définitive à considérer comme un infiniment petit le  $e_0$  du fil, 0,003.

La loi  $g(t)$  ainsi obtenue n'est pas la proportionnalité inverse à  $t$ , ce qui était à prévoir puisque la diffusivité thermique n'est pas une constante.

Pour obtenir les  $e_0$  attachés aux autres fils, on peut soit utiliser la valeur de l'ordonnée à l'origine des droites de la Fig. 11b, soit avec les valeurs de la fonction  $g$  (Fig. 17) et l'expression (27), utiliser les répartitions expérimentales de température en fonction de  $y$  et  $x$ .

Les valeurs déduites de la méthode de l'ordonnée à l'origine recourent de manière satisfaisante les valeurs obtenues à partir de la

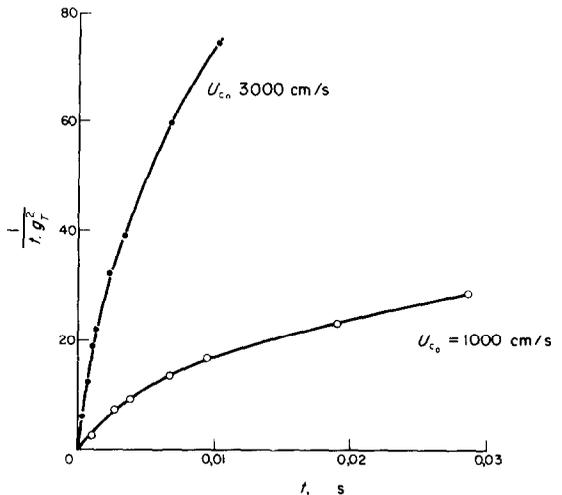


FIG. 17. Variations de  $1/(t \cdot g^2)$  en fonction de  $t$ .

relation (27) (qui fournit  $e_0$  pour les grandes valeurs de  $x$ ). Il y a une exception pour le fil de 0,300 cm. Le Tableau 6 donne les valeurs de  $e_0$  pour différents diamètres de fil.

Tableau 6.

$d$ fil, cm	0,003	0,010	0,064	0,300
$e_0$ , cm	0,10	0,14	0,50	2,3 (0,4 cm à $x = 1$ cm)
$e_0/d$	34	14	7,3	7,7

Les valeurs de  $e_0$  sont les mêmes pour les deux conduites à la précision près des mesures. L'épaisseur de la particule pour la tige de 0,3 cm ne varie plus avec  $x$  et  $y$ , seulement à partir de  $x/d = 100$ .

Enfin les résultats sont pratiquement les mêmes pour les vitesses de 1000 et 3000 cm/s. Les nombres obtenus pour le rapport  $e_0/d$  semblent indiquer que  $e_0/d$  diminue lorsque  $d$  augmente pour atteindre la valeur constante 7,8-7,7 au-delà de  $d = 0,064$  cm.

On peut donc, en attachant à chaque fil une épaisseur  $e_0$  de particule appropriée, calculer les diffusivités et leurs lois d'évolution dans les sillages qu'ils créent à partir d'une seule fonction  $g(t)$ , qui, en principe, définit la diffusion de la matière dans les sillages.

Pratiquement ceci entraîne que la détermination expérimentale de  $g$  peut se faire à l'aide de fils de diamètres quelconques: par exemple un fil très fin (0,003 cm dans nos expériences) pour lequel la correction d'épaisseur de particule peut être négligée en première approximation, ou par un fil de plus grand diamètre (0,064 cm) en tenant compte de l'épaisseur  $e_0$  correspondante.

La même coordination peut se faire pour les viscosités cinématiques. On attache à chaque diamètre de fil une épaisseur  $e_0$ , et on calcule à partir du paramètre expérimental  $z_U$  la fonction  $g$ , qui est unique pour le phénomène mécanique *mais différente de celle obtenue pour les diffusivités thermiques*; parallèlement les épaisseurs de particules ne sont pas les mêmes pour les deux phénomènes.

Nous avons ainsi obtenu deux fonctions  $g$  que nous avons notées  $g_T$  et  $g_U$  (en parallèle avec  $z_T$  et  $z_U$ ),  $g_T$  correspondant, pour les raisons indiquées ci-dessus, sinon exactement du moins de façon approchée, à la fonction de diffusion de la matière.

De même il ne faut pas considérer que  $e_0$ , soit l'épaisseur effective d'une particule effective; numériquement, particulièrement pour les fils fins,  $e_0$  est en effet un multiple trop élevé du diamètre (comme on le voit sur le tableau), et d'autre part l'image d'une particule bien définie à température uniforme n'est guère convenable en la circonstance. On doit plutôt considérer  $e_0$  comme un paramètre qui résume les effets des phénomènes très compliqués qui se produisent au voisinage immédiat du fil.

Nous avons principalement considéré les phénomènes à proximité de l'axe, c'est-à-dire dans une région où il est raisonnablement permis de supposer que les conditions sont voisines du milieu illimité et d'une structure homogène de l'écoulement. En fait, le milieu est limité par les parois, la turbulence est alors non homogène et nous avons poursuivi l'étude de cet effet [17] sur les lois de la diffusion ce qui nous a permis de calculer les corrections à apporter aux paramètres de la diffusion: loi de diffusion, longueur de provenance, diffusivités, etc.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. C. BORY, Une étude théorique par voie continue du mélange turbulence dans les fluides, *Ann. Phys.*, 12<sup>e</sup> série, T8, (1953).
2. C. BORY, Individualisation de la matière dans les écoulements, P.S.T. Note Technique, 85, 87 (1959).
3. C. BORY, J. GOSSE et DE PERETTI, Etude expérimentale de la diffusion au sein d'un écoulement turbulent, P.S.T. Note Technique 101 (1961).
4. J. GOSSE, *C.R. Acad. Sci.* **257**, 2395 (1963).
5. J. GOSSE, Sillage turbulent établi derrière un cylindre chauffé, *C.R. Acad. Sci.* **258**, 21, 5141 (25 mai 1964).
6. M. CLERIOT, Transmission de la chaleur dans un écoulement turbulent, relations avec la diffusion matérielle, Thèse de Docteur-Ingénieur, Poitiers (1963).
7. G. I. TAYLOR, Diffusion by continuous movements, *Proc. Lond. Math. Soc.* A20, (1921).
8. G. K. BATCHELOR, Diffusion in field of homogeneous turbulence, I. Eulerian analysis, *Aust. J. Sci. Res.* A2 (1949).

9. J. O. HINZE, *Turbulence: An Introduction to Its Mechanism and Theory*, McGraw-Hill, New York (1959).
10. J. O. CORRSIN, Theories of turbulent dispersion. Mécanique de la turbulence, Colloques Internationaux du C.N.R.S. n° 108 (1961).
11. F. N. FRENKIEL, Turbulent diffusion. Mean concentration distribution in a flow field of homogeneous turbulence. *Adv. Appl. Mech.* 3, 61 (1953).
12. A. A. TOWNSEND, Turbulence, *Handbook of Fluid Mechanics*, edited by L. STREETER. McGraw-Hill, New York (1961).
13. T. J. HANRATTY, Turbulent exchange of mass and momentum with a boundary, *A.I.Ch.E. Jl.* 2, 359 (1956).
14. A. FORTIER, Convection forcée, Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris (1959–1960).
15. J. BASS, Les méthodes modernes du calcul des probabilités et leur application au problème de la turbulence, G.R.A. Rapport Technique n° 28 (1947).
16. A. S. MONIN, General survey of atmosphere diffusion, *Int. Symp. on at Diffusion and Air Poll.* 6, 29, Oxford Symposium. Academic Press London (1959).
17. J. FAYET, Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques Poitiers, *Archs C.N.R.S.* No. A.O. 3367 (1970).
18. A. FAVRE, Review on space time-correlations inturbulent fluids, *J. Appl. Mech.* 32, Series E, No. 12 (1965).
19. L. TACCOEN, Etude de la diffusion de la chaleur dans un tube cylindrique circulaire lisse, Thèse de Docteur-Ingénieur, Paris (1966).
20. J. LAUFER, The structure of turbulence in fully developed pipe flow, NACA T N No. 2954 (June 1953).

### EXPERIMENTAL AND ANALYTICAL STUDY OF FRICTION AND HEAT TRANSFER IN TURBULENT FLOW

**Abstract**—Experimental turbulent diffusion are determined by measures of mean velocity and mean temperature in isothermal flow and in heated flow. For both flows, the turbulent diffusions can be obtained by the study of the disturbance, created by thin wires in the fluid.

The Boussinesq equations are used and we discuss the rough solution which assumes constant diffusion coefficients. The experimental results lead us to choose, diffusion coefficients variable with coordinates, for the flow through a pipe and in the wake. Then, we take these variations into account and we compare the diffusion coefficients in the flow through a pipe without wire to those in the wake of a wire.

We compare the diffusion theories of Bory and Taylor in order to connect the phenomenological turbulent diffusion coefficients to some statistical characteristics of the turbulence. To explain the influence of the wire diameter, we attribute to each diameter a thickness of a fictitious particle.

The results can be generalized. By the study of the diffusion in a limited heterogeneous medium, one can obtain the laws of variation of the diffusion coefficient in a flow through a pipe.

### EXPERIMENTELLE UND ANALYTISCHE UNTERSUCHUNG DER REIBUNG UND DES WÄRMEÜBERGANGS IN TURBULENTER STRÖMUNG

**Zusammenfassung**—Der turbulente Transport von Impuls und Wärme wurde durch Messungen der mittleren Geschwindigkeit und der mittleren Temperatur in einer isothermen und einer beheizten Strömung bestimmt. Für beide Strömungen kann man die turbulenten Transportkoeffizienten durch Beobachtung der Störung erhalten, die durch dünne Drähte in der Strömung hervorgerufen wird.

Es wurden die Boussinesq-Gleichungen benutzt und die einfache Lösung diskutiert, die konstante Transportkoeffizienten voraussetzt. Die Versuchsergebnisse führten dazu, die Transportkoeffizienten für die Strömung im Rohr und hinter der Störstelle in Abhängigkeit vom Ort anzusetzen. Unter Berücksichtigung dieser Abhängigkeit wurden die Transportkoeffizienten für die Rohrströmung ohne Stördraht mit denen für die Strömung hinter einem Draht verglichen.

Die Transporttheorie von Bory und Taylor wurde herangezogen, um die beobachteten turbulenten Transportkoeffizienten mit einigen statistischen Kenndaten der Turbulenz zu verknüpfen. Um den Einfluss des Drahtdurchmessers aufzuzeigen, wurde jedem Durchmesser eine fiktive Teilchengröße zugeordnet. Die Ergebnisse lassen sich verallgemeinern. Durch die Untersuchung der Transportphänomene in einem begrenzten heterogenen Medium kann man die Gesetzmässigkeiten für die Abhängigkeit des Transportkoeffizienten bei der Rohrströmung finden.

### ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА И ТРЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ

**Аннотация**—Путем измерения средней скорости и средней температуры в изотерм-

ическом и неизотермическом течениях экспериментально найдены коэффициенты турбулентной диффузии. Для обоих случаев можно найти коэффициенты турбулентной диффузии при исследовании возмущения в жидкости, внесенного проволочным турбулизатором.

Используются уравнения Бусинеска и обсуждается приближенное решение при допущении постоянных коэффициентов диффузии. Экспериментальные данные позволили выбрать коэффициенты диффузии, зависящие от координат для течений в трубе и в следе. Затем эти изменения учитывались, и коэффициенты диффузии в трубе сравнивались с коэффициентами в следе за проволочным турбулизатором.

Проведено сравнение диффузионных теорий Бори и Тейлора для того, чтобы связать феноменологические коэффициенты турбулентной диффузии с некоторыми статистическими характеристиками турбулентности. Для объяснения влияния диаметра проволоки на диаметр каждой проволоки принималась толщина фиктивной частицы.

Результаты можно обобщить. При исследовании диффузии в ограниченной гетерогенной среде можно получить закономерности изменения коэффициента диффузии в круглой трубе.